

比例积分型广义预测控制系统的稳定性分析

李 韬¹, 陈增强², 张纪峰¹

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院 系统科学研究所, 北京 100080; 2. 南开大学 自动化系, 天津 300071)

摘要: 广义预测控制(GPC)系统的闭环稳定性一直是控制理论分析的难点. 本文通过对预测控制系统闭环特征多项式的研究, 证明了一步预测比例积分型GPC系统的闭环稳定性; 同时, 利用根轨迹法分析了控制参数与闭环极点的关系, 明确了比例积分型GPC中参数的物理意义. 通过一个数值仿真例子, 从频域分析的角度说明了比例积分型GPC较普通GPC的优越性.

关键词: 预测控制; 比例积分控制; 稳定性分析; 频域分析; 根轨迹法

中图分类号: TP273.2 **文献标识码:** A

Stability analysis of systems with proportional-integral generalized predictive control

LI Tao¹, CHEN Zeng-qiang², ZHANG Ji-feng¹

(1. Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China; 2. Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: The stability analysis of the generalized predictive control (GPC) systems is studied. Based on the analysis of the characteristic polynomial of the closed-loop GPC systems, the stability of the closed-loop systems with one step ahead proportional-integral GPCs is proved. By using the root-locus method, the relationship between the poles of the closed-loop and the design parameters is explored, and the practical meanings of the design parameters in the proportional-integral GPCs are clarified. A simulation example is presented, by which the superiority of the proportional-integral GPC over the conventional GPC is explained from the point of view of frequency domain.

Key words: predictive control; proportional-integral control; stability analysis; frequency domain analysis; root-locus method

1 引言(Introduction)

20世纪50年代末, 在航空、航天等技术的推动下, 控制科学开始了从经典控制论向现代控制论的过渡. 以状态空间法为主体的现代控制论给工业过程控制引进了状态反馈、解耦控制、最优控制等一系列新的思想方法. 但当人们将现代控制理论应用于实际工业过程时, 遇到了很大的困难. 这主要是由于现代控制论的这些方法必须基于被控对象精确的数学模型, 而实际的工业过程不仅内部机理复杂, 而且其参数往往随时间和环境的变化而改变, 工业现场的各种不确定干扰也很多, 因此工业自动化迫切要求一种简单易行、鲁棒性好、便于实时计算的新型控制算法.

1980年前后, Richalet等人基于对象脉冲响应模型提出了模型预测启发控制(model predictive heuristic control, MPHC), 并介绍了其在过程控制中的效

果. Culter基于对象阶跃响应模型提出了动态矩阵控制(dynamic matrix control, DMC). 这些算法具有对模型要求低、滚动优化、反馈校正等许多优点, 引发了预测控制在工业过程控制中的大量应用. 在预测控制思想的带动下, 其他控制理论研究者也吸取预测控制的优点, 不断发展出了新的控制算法. 1987年Clarke将自校正控制与预测控制相结合, 提出了广义预测控制(generalized predictive control, GPC), 使得该控制器具有较强的适应能力, 在复杂工业过程中获得了成功的应用^[1~4]. 此后对各种改进GPC算法的研究蓬勃兴起. 由于传统的PID控制算法简单可靠, 至今仍在大量的工业控制中应用. 文[5]将PID的反馈结构和GPC的预测功能相结合, 提出了鲁棒性更好、更适于工业现场应用的比例积分型广义预测控制器(proportional and integral generalized predictive control, PIGPC), 并用仿真算例

从时域角度说明了该控制器较普通GPC的优越性.

本文基于预测控制系统的闭环特征多项式,从理论上严格证明了一步预测PIGPC的闭环稳定性.利用根轨迹方法分析了控制参数与闭环极点的关系,明确了PIGPC中参数的物理意义.给出了一个数值仿真例子,从频域稳定裕度的角度说明了PIGPC较普通GPC的优越性.

2 对象模型与预测控制律(System model and predictive control)

本文考虑如下常用的CARIMA模型^[5]

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-1}B(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})\varepsilon(t)/\Delta, \quad (1)$$

其中: $y(t)$ 和 $u(t)$ 分别为系统的输出量和控制量, $\{\varepsilon(t)\}$ 为零均值白噪声序列, z^{-1} 为后移算子, $\Delta = 1 - z^{-1}$ 为向后一阶差分算子, $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 为如下形式的后移算子 z^{-1} 的多项式:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_{n_a}z^{-n_a}, \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_{n_b}z^{-n_b}, \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + \cdots + c_{n_c}z^{-n_c}, \end{aligned}$$

其中 $C(z^{-1})$ 零点全部在单位圆内.

比例积分型广义预测控制目标函数取如下形式

$$\begin{aligned} J = \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^{N_y} k_i [e(t+j)]^2 + k_p [\Delta e(t+j)]^2 + \right. \\ \left. \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

其中: N_y 为预测时域长度, N_u 为控制时域长度, $N_y \geq N_u$, $k_i > 0$, $k_p \geq 0$, λ 为控制加权系数, $\{e(t+j)\}$ 为误差序列

$$e(t+j) = w_j(t) - y(t+j), j = 1, 2, \dots, N_y;$$

$\{w_j(t)\}$ 为给定值 $y_r(t)$ 的柔化序列

$$\begin{cases} w_0(t) = y(t), \\ w_j(t) = \alpha w_{j-1}(t) + (1 - \alpha)y_r(t), j = 1, 2, \dots, N_y, \end{cases} \quad (3)$$

$\alpha \in [0, 1)$ 为给定的柔化因子.

为求得输出 j 步向前最优预测, 求解如下两组Diophantine方程

$$\begin{cases} C(z^{-1}) = A(z^{-1})\Delta E_j(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}), \\ E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1})C(z^{-1}) + z^{-j}H_j(z^{-1}), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, N_y$,

$$G_j(z^{-1}) = g_0 + g_1z^{-1} + \cdots + g_{j-1}z^{-(j-1)}.$$

对 $j = 1, 2, \dots, N_y$, 记

$$y_j(t) = \frac{F_j(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(t) + \frac{z^{-1}H_j(z^{-1})}{C(z^{-1})}\Delta u(t), \quad (5)$$

则极小化式(2), 可得到比例积分型广义预测控制律

$$u(t) = u(t-1) + d_c^T(\bar{w} - \bar{y}_p), \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{y}_p &= [y_1(t), \dots, y_{N_y}(t)]^T, \bar{w} = [w_1(t), \dots, w_{N_y}(t)]^T, \\ d_c^T &= \eta^T(\lambda I_{N_u} + G_I^T(k_i I_{N_y} + k_p S^T S)G_I)^{-1}G_I^T(k_i I_{N_y} + \\ & k_p S^T S), \eta = (0, 0, \dots, 1)_{1 \times N_u}^T, \end{aligned}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{N_y \times N_y}, G_I = \begin{bmatrix} g_0 & & & & \\ g_1 & g_0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ g_{N_u-1} & \cdots & \cdots & g_0 & \\ \vdots & & & \vdots & \\ g_{N_y-1} & \cdots & \cdots & g_{N_y-N_u} & \end{bmatrix}.$$

这里只保留了后文所用到的符号说明, 最优预测控制律(6)的详细推导可参见文[5].

注 1 要求噪声多项式 $C(z^{-1})$ 的零点全部在单位圆内, 主要基于以下两点原因:

A) 辨识算法收敛性的需要: 可将模型(1)改写为

$$A(z^{-1})\Delta y(t) = z^{-1}B(z^{-1})\Delta u(t) + C(z^{-1})\varepsilon(t).$$

因此可以将 $\Delta y(t)$ 和 $\Delta u(t)$ 分别作为输出量和输入量, 采用拓广最小二乘法(ELS)辨识 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$. 采用ELS辨识参数时, 算法的收敛性条件要求 $C(z^{-1})$ 的零点全部在单位圆内^[6,7].

B) 对于典型的工业过程, $C(z^{-1})$ 通常是时变的, 很难在线估计, 这时可以根据对噪声过程的先验知识选取 $T(z^{-1})$ 代替 $C(z^{-1})$, 也要求 $T(z^{-1})$ 的零点在单位圆内^[2].

注 2 当 $k_i = 1$, $k_p = 0$ 时, 由目标函数(2)和控制律(6)可知, PIGPC退化为GPC.

3 闭环系统的稳定性分析(Stability analysis of the closed-loop systems)

记

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= [\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{N_y}]^T, \theta = [1, 1, \dots, 1]_{1 \times N_y}, \\ \bar{F}(z^{-1}) &= [F_1(z^{-1}), F_2(z^{-1}), \dots, F_{N_y}(z^{-1})]^T, \\ \bar{H}(z^{-1}) &= [H_1(z^{-1}), H_2(z^{-1}), \dots, H_{N_y}(z^{-1})]^T. \end{aligned}$$

为叙述简单, 在不致引起混淆的情况下, 下面将略去 z^{-1} 多项式中的 z^{-1} . 例如, $A(z^{-1})$ 略为 A 代表, $\bar{F}(z^{-1})$ 略为 \bar{F} . 由式(3)得

$$\bar{w} = \bar{\alpha}y(t) + (\theta - \bar{\alpha})y_r(t). \quad (7)$$

由式(5)得

$$\bar{y}_p = \frac{\bar{F}y(t) + z^{-1}\Delta\bar{H}u(t)}{C}. \quad (8)$$

将式(7)(8)代入式(6)得

$$(C + z^{-1}d_c^T\bar{H})\Delta u(t) = d_c^T(\theta - \bar{\alpha})Cy_r(t) - d_c^T(\bar{F} - \bar{\alpha}C)y(t). \quad (9)$$

记 $T(z^{-1}) = C + z^{-1}d_c^T\bar{H}$, $S(z^{-1}) = d_c^T(\bar{F} - \bar{\alpha}C)$, $R(z^{-1}) = d_c^T(\theta - \bar{\alpha})C$, 则由式(9)得

$$u(t) = \frac{R}{T\Delta}y_r(t) - \frac{S}{T\Delta}y(t) = \frac{S}{T\Delta}[\frac{R}{S}y_r(t) - y(t)]. \quad (10)$$

记 $D(z^{-1}) = \frac{S}{T\Delta}$, $G_r(z^{-1}) = \frac{R}{S}$, $G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B}{A}$,

$N(z^{-1}) = \frac{C}{A\Delta}$, 则由模型(1)易知从 $y_r(t)$ 到 $y(t)$ 的传递函数为

$$G^*(z^{-1}) = G_r(z^{-1}) \frac{D(z^{-1})G(z^{-1})}{1 + D(z^{-1})G(z^{-1})} = \frac{z^{-1}BR}{AT\Delta + z^{-1}BS}. \quad (11)$$

考察有 d 步延迟的系统模型. 式(1)可写为

$$A(z^{-1})\Delta y(t) = z^{-d}\tilde{B}(z^{-1})u(t) + C(z^{-1})\varepsilon(t), \quad (12)$$

其中: $\tilde{B}(z^{-1}) = z^{d-1}B(z^{-1})\Delta$, $b_0 = b_1 = \dots = b_{d-2} = 0$, $b_{d-1} \neq 0$.

引理 1^[8] 多项式 $G_j(z^{-1})$ 的前 j 项系数就是被控对象阶跃响应前 j 个采样时刻的值, 即在收敛域内 $\frac{z^{-1}B}{A\Delta} = g_0z^{-1} + g_1z^{-2} + \dots + g_jz^{-(j+1)} + \dots$.

引理 2 若系统存在 d 步延迟, 则 $g_0 = g_1 = \dots = g_{d-2} = 0$, $g_{d-1} = b_{d-1}$.

证 由引理1和 $\tilde{B}(z^{-1}) = z^{d-1}B(z^{-1})\Delta$, $b_0 = b_1 = \dots = b_{d-2} = 0$, $b_{d-1} \neq 0$ 即得.

对于模型(12), 将研究具有参数 $N_y = d$, $N_u = 1$, $\lambda = 0$, $\alpha \in [0, 1)$, $k_i \in (0, \infty)$, $k_p \in [0, \infty)$ 的一类PIGPC给出的闭环系统的稳定性.

由于系统存在 d 步延迟, 由引理2易得

$$G_j(z^{-1}) = 0, j = 1, 2, \dots, d-1, \quad (13)$$

$$G_d(z^{-1}) = g_{d-1}z^{-(d-1)}.$$

定理 1 记 $T_0 = C + g_{d-1}z^{-1}H_d$, $S_0 = g_{d-1}F_d$, 则

$$AT_0\Delta + z^{-1}BS_0 = g_{d-1}z^{d-1}BC. \quad (14)$$

证 由式(4)(13)得

$$\frac{S_0}{T_0} = \frac{F_d}{(g_{d-1}C + z^{-1}H_d)} =$$

$$\frac{F_d}{[g_{d-1}C + z^{d-1}(E_dB - Cg_{d-1}z^{-(d-1)})]} = \frac{F_d}{z^{d-1}BE_d}. \quad (15)$$

将 S_0 代入式(15)得

$$g_{d-1}T_0 = z^{d-1}E_dB. \quad (16)$$

由式(15)得

$$A\Delta + z^{-1}B\frac{S_0}{T_0} = A\Delta + z^{-1}\frac{F_d}{z^{d-1}E_d}.$$

由此及式(4)得

$$\frac{AT_0\Delta + z^{-1}BS_0}{T_0} = \frac{C}{E_d},$$

进而由式(16)知式(14)成立.

下面推导闭环特征多项式 $AT\Delta + z^{-1}BS$. 由

$$k_i I_{N_y} + k_p S^T S = \begin{bmatrix} -2k_p + k_i & -k_p & & & \\ & -k_p & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -k_p \\ & & & -k_p & k_i + k_p \end{bmatrix},$$

得

$$d_c^T = (0, 0, \dots, \frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}, g_{d-1}^{-1})_{1 \times N_y},$$

$$T = T_0 + \frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}z^{-1}H_{d-1},$$

$$S = S_0 + (\frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}\alpha^{d-1} - \frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}\alpha^d)C + \frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}F_{d-1}.$$

因此,

$$(AT\Delta + z^{-1}BS) - (AT_0\Delta + z^{-1}BS_0) = z^{-1}\frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}(A\Delta H_{d-1} + BF_{d-1}) + z^{-1}BC(\frac{k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}\alpha^{d-1} - g_{d-1}^{-1}\alpha^d) = z^{-1}BC(\frac{k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}\alpha^{d-1} - g_{d-1}^{-1}\alpha^d) + \frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}z^{d-2}BC.$$

再由定理1得

$$AT\Delta + z^{-1}BS = AT_0\Delta + z^{-1}BS_0 + \frac{-k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}z^{d-2}BC + z^{-1}BC(\frac{k_p}{k_i + k_p}g_{d-1}^{-1}\alpha^{d-1} - g_{d-1}^{-1}\alpha^d) =$$

$$g_{d-1}^{-1}z^{d-1}BC\left[1 - \frac{k_p}{k_i + k_p}z^{-1} + z^{-d}\left(\frac{k_p}{k_i + k_p}\alpha^{d-1} - \alpha^d\right)\right]. \quad (17)$$

注意到,由引理2, $g_{d-1} = b_{d-1}$. 所以,若令 $\gamma = k_p/k_i$, $\gamma^* = \frac{\gamma}{1+\gamma}$, 则 $\gamma \in [0, \infty)$, $\gamma^* \in [0, 1)$, 且式(17)的右边可写为

$$b_{d-1}^{-1}z^{d-1}BC[1 - \gamma^*z^{-1} + z^{-d}(\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d)]. \quad (18)$$

引理3 当 $0 \leq \gamma < \frac{1+\alpha^d}{\alpha^{d-1}(1-\alpha)}$ 时,有

$$\frac{1}{1+\gamma} > |\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d|. \quad (19)$$

证 由 γ^* 的定义易知 $0 \leq \gamma^* < \frac{1+\alpha^d}{1+\alpha^{d-1}}$ 等价于 $0 \leq \gamma < \frac{1+\alpha^d}{\alpha^{d-1}(1-\alpha)}$. 因此,只需证明当 $0 \leq \gamma^* < \frac{1+\alpha^d}{1+\alpha^{d-1}}$ 时式(19)成立即可. 下面,分 $\gamma^* \geq \alpha$ 和 $\gamma^* < \alpha$ 两种情况讨论.

当 $\gamma^* \geq \alpha$ 时,有 $\gamma \geq (1+\gamma)\alpha$, 进而有 $\gamma\alpha^{d-1} - (1+\gamma)\alpha^d \geq 0$ 和

$$\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d = \frac{\gamma\alpha^{d-1} - (1+\gamma)\alpha^d}{1+\gamma} \geq 0.$$

再注意到由 $\frac{\gamma}{1+\gamma} = \gamma^* < \frac{1+\alpha^d}{1+\alpha^{d-1}}$ 可得 $1 > \gamma\alpha^{d-1} - (1+\gamma)\alpha^d$, 所以有

$$\frac{1}{1+\gamma} > \frac{\gamma\alpha^{d-1} - (1+\gamma)\alpha^d}{1+\gamma} = |\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d|.$$

因此,式(19)成立.

当 $\gamma^* < \alpha$ 时,有 $(1+\gamma)\alpha > \gamma$, 进而有 $(1+\gamma)\alpha^d - \gamma\alpha^{d-1} > 0$ 和

$$-(\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d) = \frac{(1+\gamma)\alpha^d - \gamma\alpha^{d-1}}{1+\gamma} > 0.$$

再注意到由 $\alpha \in [0, 1)$ 知 $\frac{1-\alpha^d}{1-\alpha^{d-1}} - \alpha = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{d-1}} > 0$,

所以有 $\frac{1-\alpha^d}{1-\alpha^{d-1}} > \alpha > \gamma^* = \frac{\gamma}{1+\gamma}$. 由此可得 $1 > (1+\gamma)\alpha^d - \gamma\alpha^{d-1}$ 和

$$\frac{1}{1+\gamma} > \frac{(1+\gamma)\alpha^d - \gamma\alpha^{d-1}}{1+\gamma} = |\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d|.$$

因此,式(19)成立.

定理2 在具有参数 $N_y = d$, $N_u = 1$, $\lambda = 0$, $\alpha \in [0, 1)$, $k_i \in (0, \infty)$, $k_p \in [0, \infty)$ 的PIGPC控制下,若 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的零点全部在单位圆内,且 $0 \leq \gamma < \frac{1+\alpha^d}{\alpha^{d-1}(1-\alpha)}$, 则闭环特征多项式 $AT\Delta + z^{-1}BS$

的零点全部在单位圆内,即闭环系统是渐近稳定的.

证 由式(17)和(18)知,只需要证明 $1 - \gamma^*z^{-1} + z^{-d}(\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d)$ 在 $|z| \geq 1$ 上无零点即可.

注意到 $z^d - \gamma^*z^{d-1}$ 在 $|z| < 1$ 上解析,在 $|z| \leq 1$ 上连续,且利用引理3知在 $|z| = 1$ 上有

$$|z^d - \gamma^*z^{d-1}| \geq |z| - \gamma^* = \frac{1}{1+\gamma} > |\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d|.$$

所以由儒歇定理知,多项式 $z^d - \gamma^*z^{d-1} + (\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d)$ 与多项式 $z^d - \gamma^*z^{d-1}$ 在单位圆内有同样多的零点. 由于 $\gamma^* \in [0, 1)$, 所以 $z^d - \gamma^*z^{d-1}$ 在单位圆内有 d 个零点. 从而多项式 $z^d - \gamma^*z^{d-1} + (\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d)$ 在单位圆内有 d 个零点,在 $|z| \geq 1$ 上无零点;或等价地, $1 - \gamma^*z^{-1} + z^{-d}(\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d)$ 在 $|z| \geq 1$ 上无零点.

注3 由定理2可见当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, γ 的稳定域上界趋于无穷,因此较小的 α 不会破坏稳定性;而当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, γ 的稳定域上界也趋于无穷. 但应指出的是,较大的 α 将导致系统的响应缓慢,上升时间增加. 而从仿真算例1可以看出,增大 α , 可以提高系统的稳定裕度. 因此,这里有一个在响应快速性和系统鲁棒性求得平衡的问题,而正是在这一点上,PIGPC比GPC做得更好,可参见仿真算例.

注4 由式(17)(18)知,控制器参数 k_i , k_p , α 对系统闭环特征根的影响是通过改变多项式 $z^d - \gamma^*z^{d-1} + (\gamma^*\alpha^{d-1} - \alpha^d)$ 的零点实现的. 由定理2知,当 $0 \leq \gamma < \frac{1+\alpha^d}{\alpha^{d-1}(1-\alpha)}$ 时,该多项式的零点全部在单位圆内. 注意到当 α 趋于0时, γ 的稳定域上界趋于 ∞ (γ^* 的稳定域上界趋于1). 下面用根轨迹的方法分析该多项式的零点是如何随控制器参数的选择而改变的. 通过下面的分析将会看到定理2中关于 γ 的限制性条件实际上是不需要的,即对于任意的 $\gamma \geq 0$ ($\gamma^* \in [0, 1)$), 该多项式的零点全部在单位圆内.

需要指出的是,这里没有要求被控对象是开环稳定的. 因此,所得结果既适用于开环稳定情形,也适用于开环不稳定情形.

固定 α 关于 γ^* 的根轨迹方程为

$$\gamma^* \frac{z^{d-1} - \alpha^{d-1}}{z^d - \alpha^d} = 1. \quad (20)$$

该根轨迹有如下特点:

A) 开环极点为 α^d 的 d 次复方根,均匀分布在 $|z| = \alpha$ 的圆周上;有限开环零点有 $d-1$ 个,为 α^{d-1} 的 $d-1$ 次复方根,也均匀分布在 $|z| = \alpha$ 的圆周上,有一个 ∞ 开环零点.

B) 有 $d-1$ 条根轨迹分支从 $d-1$ 个开环极点出发,终止于 $d-1$ 有限开环零点. 其中有一个不动点分支:从 $z = \alpha$ 到 $z = \alpha$. 有一条分支从开环极点出发,终止于 ∞ (这只是 $\gamma^* = \infty$ 时,实际上 $\gamma^* \in [0, 1)$).

C) 当 $\gamma^* = \alpha$ 时,除不动点分支外,全部分支汇于原点,即根轨迹方程有 $d-1$ 重零根,有一个 $z = \alpha$ 的

实根.

对于 d 为奇数情形, 与图 1 类似, 有 $d - 3$ 条花瓣形复分支, 起始于开环极点, 终止于有限开环零点, 其中一条分支起始于开环极点, 终止于 $z = -\alpha$, 加上不动点 $z = \alpha$, $d - 1$ 条分支全部位于 $|z| = \alpha$ 的圆内. 只有一条根轨迹分支从开环极点出发, γ^* 足够大后经过 $z = 1$, 跑出单位圆. 由于 $\gamma^* \in [0, 1)$ 如果根轨迹方程有 $z = 1$ 的根时 $\gamma^* \geq 1$, 说明当 $\gamma^* \in [0, 1)$ 时, 根轨迹始终位于单位圆内.

d 为偶数时类似, 只不过这时有 $d - 2$ 条花瓣形复分支始终位于 $|z| = \alpha$ 的圆内, 有一条不动点分支, 有一条实分支从 $z = -\alpha$ 出发, 终止于 ∞ . 稳定性也取决于这条分支.

由方程(20)知, 当根轨迹方程有 $z = 1$ 的根时 $\gamma^* = \frac{1 - \alpha^d}{1 - \alpha^{d-1}} \geq 1$ 可见从根轨迹直观分析, 当 $\gamma^* \in [0, 1)$ 时, 根轨迹完全位于单位圆内.

注 5 由式(11)(17)和(18)得闭环系统的传递函数为

$$G^*(z^{-1}) = \frac{d_c^T g_{d-1}(\theta - \bar{\alpha})}{z^d [1 - \gamma^* z^{-1} + z^{-d}(\gamma^* \alpha^{d-1} - \alpha^d)]}, \quad (21)$$

所以如果只从输入输出稳定性考虑, 闭环系统的稳定性与被控对象的极点和零点, 也即 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的零点无关. 再结合注 4 可知, 闭环系统的输入输出稳定性与被控对象的模型和控制参数 k_i, k_p, α 的选取无关, 一步预测 PIGPC 可以使闭环极点全部配置在单位圆内.

注 6 由式(17)知 $B(z^{-1})$ 的零点全部在单位圆内, 实际上是闭环系统渐近稳定(但不是输入输出稳定)的必要条件. 注意到 GPC 是 PIGPC 的特例, 可以说采用一步预测跟踪控制要求被控对象的零点全部在单位圆内, 这是一步预测跟踪控制的一个基本限制. 实际上最小方差控制也要求被控对象的零点全部在单位圆内, 这也是因为最小方差控制也是一步预测跟踪控制的缘故^[9,10]. 但一步预测 PIGPC 仍然解决了最小方差控制中存在的控制信号过大的问题; 而 PIGPC 由于在目标函数中引入了 k_p 项, 实际上引入了对跟踪误差增量的惩罚, 从而使控制动作更加平缓, 特别有利于现场执行机构的保护. 对于 $B(z^{-1})$ 有不稳定零点的对象, 可采用多步预测 PIGPC. 具体实例可参见文[5].

由于一步预测 PIGPC 要求系统的时延 d 确切已知, 这对于某些工业过程较难获得, 因此研究对时延变化的鲁棒性更好的多步 PIGPC 的稳定性是未来研究的重要方向. 对于多步预测控制, 目前已知的有关稳定性的结果^[2,11~13] 大都要求 $\lambda = 0$ 或 $N_y \rightarrow \infty$. 其中文[2]指出若 $N_u = N_y, N_y \rightarrow \infty, \lambda > 0$ 或 $N_y \rightarrow \infty, N_u \rightarrow \infty, N_u \leq N_y - n + 1, \lambda = 0$ 时, 闭环系统是稳定的, 文[1]建议 $N_y \geq n_b$, 最好选取较大的 N_y , 相应的接近于对象的上升时间. 由此可见

适当的增大预测时域是必要的, 不会破坏稳定性. 由引理 2 和式(6)可知, 当 $N_y < d$ 时, $d_c^T = 0$, 从而使反馈控制律失效. 因此若对象的时延上界 d_{\max} 已知, 建议 N_y 的选取至少满足 $N_y \geq \max\{N_u, d_{\max}, n_b\}$.

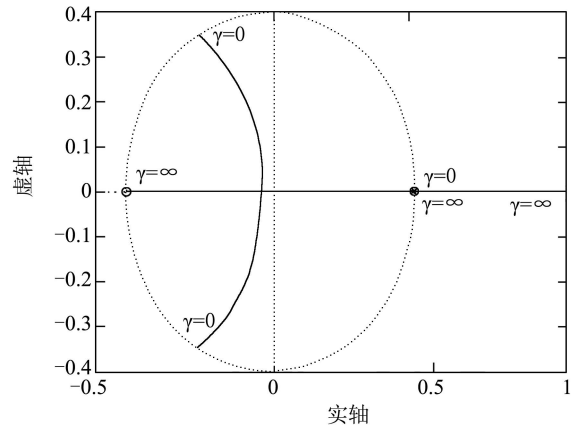


图 1 $d = 3, \alpha = 0.4$ 时根轨迹

Fig. 1 Root locus with parameters $d = 3, \alpha = 0.4$

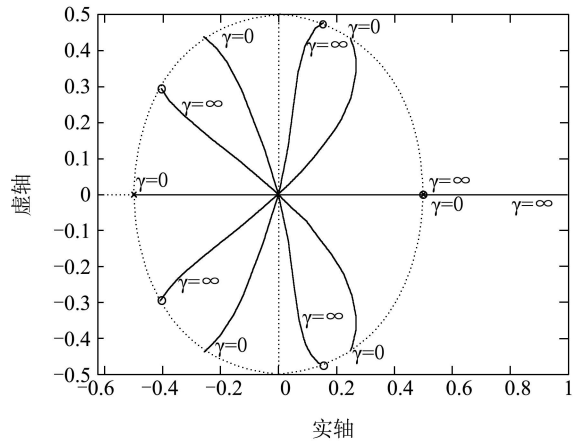


图 2 $d = 6, \alpha = 0.5$ 时根轨迹

Fig. 2 Root locus with parameters $d = 6, \alpha = 0.5$

4 仿真算例(Simulation example)

当 $k_i = 1, k_p = 0$ 时 PIGPC 退化为普通 GPC. 从下面仿真例子中可以看出, k_p 的引入增大了系统阻尼, 使输出更加平缓; k_i 的增大则有相反的效果. 通过平衡 k_p 和 k_i , 可以实现既增大了稳定裕度, 又保持一定的动态性能, 即更容易实现时域和频域的“双赢”.

例 1 系统模型为:

$$\frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-1}(0.368 + 0.2657z^{-1})}{1 - 1.368z^{-1} + 0.368z^{-2}},$$

$$C(z^{-1}) = 1, y_r(t) = 100, \varepsilon(t) = 0;$$

指标参数: $N_y = 5, N_u = 1, \lambda = 0.5, k_i = 1;$

控制方案 1: $\alpha = 0.1, k_p = 0;$

控制方案 2: $\alpha = 0.8, k_p = 0;$

控制方案 3: $\alpha = 0.1, k_p = 16;$

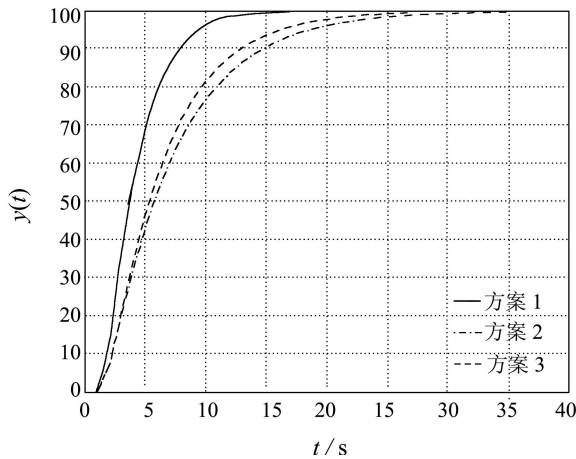


图3 例1不同控制策略时域响应对比

Fig. 3 Comparison of time-domain responses among different control strategies of example 1

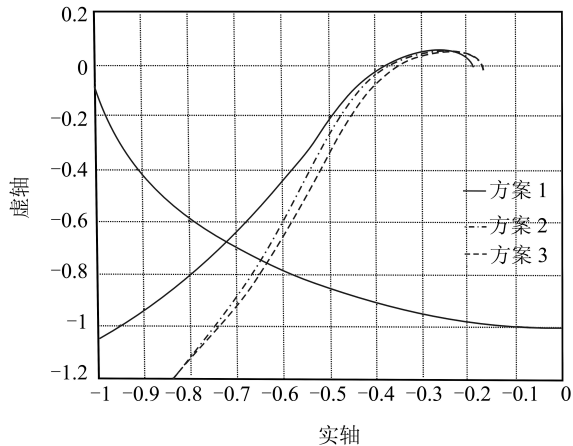


图4 例1不同控制策略稳定裕度对比

Fig. 4 Comparison of stability margins among different control strategies of example 1

由图3和图4可见, 如果采用普通型GPC, 那么增大 α 可以提高系统的稳定裕度(方案2), 但如果采用PIGPC, 那么保持 α 不变, 增大 k_p 不仅可以获得更大的稳定裕度(图4), 而且相应的时域响应更加迅速(图3). 3种控制方案的幅值裕度和相角裕度如下表所示:

表1 例1的稳定裕度对比表

Table 1 Comparison of stability margins of example 1

	方案1	方案2	方案3
幅值裕度/dB	8.279	8.640	9.022
相角裕度/ $^\circ$	43.2674	49.1267	49.7830

5 结论(Conclusion)

本文基于预测控制系统的闭环特征多项式, 证明了一步预测PIGPC的闭环稳定性. 利用根轨迹方法分析了控制参数与闭环极点的关系, 明确了PIGPC中参数的物理意义. 通过数值仿真例子, 从频域稳定裕度的角度说明了PIGPC较普通GPC的优越性. 发现PIGPC中的参数 k_i 增大有利于时域响应的快速性,

而另一参数 k_p 增大则有利于提高频域稳定裕度. 未来的研究方向是多步PIGPC的稳定性, 特别是闭环稳定性与时延 d , 预测时域 N_y 的关系, 从而为设计对系统时延变化鲁棒性更好的控制器提供指导.

参考文献(References):

- [1] CLARK D W, MOHTADI C, THUFFS P S. Generalized predictive control—Part I: the basic algorithm[J]. *Automatica*, 1987, 23(2): 137–148.
- [2] CLARK D W, MOHTADI C, THUFFS P S. Generalized predictive control—Part II: extensions and interpretations[J]. *Automatica*, 1987, 23(2): 149–160.
- [3] CLARK D W. Application of generalized predictive control to industrial processes[J]. *IEEE Control System Magazine*, 1988, 8(2): 49–55.
- [4] BORDONS C, CAMACHO E F. A generalized predictive controller for a wide class of industrial processes[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 1998, 6(3): 372–387.
- [5] 陈增强, 车海平, 袁著社. 具有比例积分结构的广义预测自校正控制器[J]. *控制与决策*, 1994, 9(2): 105–110. (CHEN Zengqiang, CHE Haiping, YUAN Zhuzhi. A generalized predictive self-tuning controller with proportion and integration structure[J]. *Control and Decision*, 1994, 9(2): 105–110.)
- [6] CHEN Hanfu, GUO Lei. Convergence rate of least squares identification and adaptive control for stochastic systems[J]. *Int J Control*, 1986, 44(5): 1459–1476.
- [7] LAI T L, WEI C Z. Extended least squares and their applications to adaptive control and prediction in linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(10): 898–906.
- [8] ASTROM K J, WITTENMARK B. 自适应控制[M]. 李清泉, 等译. 北京: 科学出版社, 1992: 130–136. (ASTROM K J, WITTENMARK B. *Adaptive Control*[M]. LI Qingquan, et al. Beijing: Science Press, 1992: 130–136.)
- [9] GOODWIN G C, SIN K S. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984: 458–463.
- [10] GUO Lei, CHEN Hanfu. The Astrom-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS based adaptive trackers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(7): 802–812.
- [11] CLARK D W, MOHTADI C, THUFFS P S. Properties of generalized predictive control[J]. *Automatica*, 1989, 25(6): 859–875.
- [12] 席裕庚, 张峻. 广义预测控制系统闭环特性研究[J]. *中国科学(E辑)*, 1996, 26(6): 519–527. (XI Yugeng, ZHANG Jun. Study on the closed-loop properties of GPC[J]. *Science in China (Series E)*, 1996, 26(6): 519–527.)
- [13] 张峻, 席裕庚. 广义预测控制系统的若干稳定性结果[J]. *控制理论与应用*, 1998, 15(1): 24–30. (ZHANG Jun, XI Yugeng. Several stability results on GPC system[J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(1): 24–30.)
- [14] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 1987. (ZHONG Yuquan. *Theory of Complex Functions*[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 1987.)

作者简介:

李 韬 (1981—), 男, 中国科学院数学与系统科学研究院的博士研究生, 研究方向为系统建模与适应控制, E-mail: litao@amss.ac.cn;

陈增强 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性自适应控制、预测控制、智能控制, E-mail: chenzzq@nankai.edu.cn;

张纪峰 (1963—), 男, 研究员, 博士生导师, 研究方向为随机系统、适应控制等, E-mail: jif@iss.ac.cn.